Lösungen Langzeithausaufgabe zum Thema Lineare Zusammenhänge

LH

Aufgabe 1
Eine *Funktion* ist eine Zuordnung, die einem Element aus einer *Definitionsmenge* ein Element aus einer *Wertemenge* zuordnet. Das Element aus der Definitionsmenge, das man in die Funktion einsetzt, bezeichnet man als *Argument*. Das Element der Wertemenge, welches dem Argument durch die Funktion zugeordnet wird, bezeichnet man als *Funktionswert.*

Beispiel 1: Die Definitionsmenge ist die Menge aller Schüler an dieser Schule. Die Funktion ordnet jedem Schüler den Anfangsbuchstaben seines Nachnamens zu. Das Argument ist der Schüler, der Funktionswert der Buchstabe. Die Wertemenge ist die Menge aller Buchstaben, die als Anfangsbuchstabe vorkommen.

Beispiel 2: Die Definitionsmenge ist die Menge aller rationalen Zahlen Q. Die Funktion ordnet jeder rationalen Zahl das Doppelte dieser Zahl zu. Das Argument ist eine Zahl, der Funktionswert das Doppelte dieser Zahl. Die Wertemenge ist auch Q. Symbolisch schreibt man diese Funktion als $x \rightarrow 2x$ oder y = 2x.

Aufgabe 2:
Ein *Funktionsterm* ist ein Term, der genau eine Variable (meistens *x*) enthält und mit dem man den Funktionswert einer bestimmten Funktion *f* berechnen kann. Allgemein schreibt man dafür $f(x)$. Um eine Funktion zu definieren, gibt man den Funktionsterm explizit an, zum Beispiel $f(x) = x + 1$ oder $f(x) = x^2$.

Eine *lineare Funktion* ist eine Funktion, deren Funktionsterm die Form $f(x) = mx + b$ hat, wobei *m* und *b* beliebige rationale Zahlen sind. Alternativ kann man auch sagen: Eine lineare Funktion ist eine Funktion, deren Graph eine Gerade ist. Eine lineare Funktion hat die folgende Eigenschaft: Wenn man das Argument *x* um einen bestimmten Betrag erhöht, so wächst auch der Funktionswert $f(x)$ immer um einen bestimmten Betrag.

Die *Steigung* einer linearen Funktion ist die Zahl, um die der Funktionswert anwächst, wenn man das Argument um eins erhöht. Wenn der Funktionsterm $f(x) = mx + b$ lautet, so ist *m* die Steigung. Je größer *m* ist, umso steiler steigt der Graph an. Wenn *m* negativ ist, fällt der Graph.
Der *y-Achsenabschnitt* einer linearen Funktion ist die Stelle, an der der Graph die *y*-Achse schneidet.
Es ist der Funktionswert an der Stelle $x = 0$, also $f(0) = m \cdot 0 + b = b$.

Die *Nullstelle* einer linearen Funktion ist die Stelle, an der der Graph die *x*-Achse schneidet.
Man findet sie, indem man die Gleichung $f(x) = 0$, also $mx + b = 0$ löst.
Die Lösung ist $x = -\frac{b}{m}$, wenn $m \neq 0$ ist.

Aufgabe 3
Der Graph zu (2) stellt eine Funktion dar, die Graphen (1) und (3) nicht. Dass es sich bei (1) nicht um eine Funktion handeln kann, erkennt man, wenn man zum Beispiel den *x*-Wert 2 betrachtet. Der zugehörige *y*-Wert ist sowohl 1,5 als auch 2,5. Das kann nicht sein, da ein Funktionswert eindeutig zugeordnet sein muss. Das Gleiche gilt für den Graphen (3). Wenn man dort zum Beispiel den *x*-Wert 2,5 wählt, ergeben sich wieder die *y*-Werte 1,5 und 2,5. Die Zuordnung ist also nicht eindeutig. Der Graph (2) gehört zu einer Funktion, da jedem *x*-Wert eindeutig ein *y*-Wert zugeordnet ist. Zum Beispiel wird dem *x*-Wert 2 der *y*-Wert 1,5 zugeordnet, denn der Punkt (2|1,5) gehört zum Graphen, der Punkt (2|2,5) jedoch nicht. Die Definitionsmenge ist Q. Die Wertemenge besteht aus allen „halbzahligen“ rationalen Zahlen, also {. . . −2,5; −1,5; −0,5; 0,5; 1,5; 2,5; . . .}.

Aufgabe 4:

a) Die Funktion hat die Gleichung $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$. Daraus ergibt sich $f(123456) = -61725$.

b) Um als Funktionswert eine Million zu erhalten, muss man die Gleichung
$3 - \frac{1}{2}x = 1000000$ lösen.

Umgeformt ergibt sich: $$-\frac{1}{2}x = 999997$$

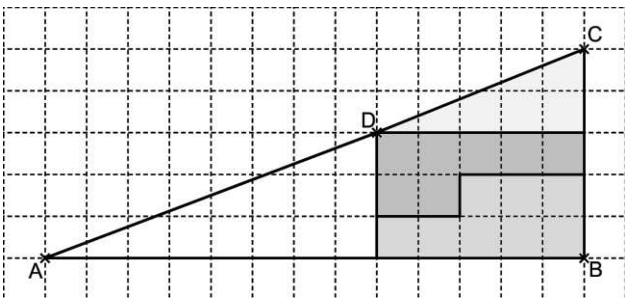
$$x = -1999994$$

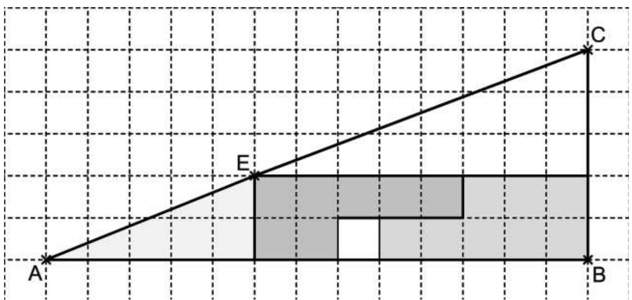
Aufgabe 5:

Betrachtet man in der ersten Figur den Punkt D, an dem die beiden Teildreiecke zusammenstoßen, so kann man zeigen, dass dieser nicht auf der Strecke AC liegt, sondern ein Stück unterhalb dieser Strecke. Dagegen liegt der Punkt E in der zweiten Figur ein Stück oberhalb dieser Strecke. Die Figur ABCD ist deshalb um ein Kästchen kleiner als die Figur ABCE.

Wie kann man feststellen, dass D unterhalb der Strecke AC liegt?
Man betrachtet die beiden Teilstrecken AD und DC und bestimmt deren Steigungen. Für die Teilstrecke AD findet man die Steigung $\frac{3}{8} = 0{,}375$. Für die Teilstrecke DC dagegen die Steigung $\frac{2}{5} = 0{,}4$. Die Strecke DC ist etwas steiler als die Strecke AD. Daher liegt der Punkt D unterhalb der Strecke AC. Diese hat übrigens die Steigung $\frac{5}{13} \approx 0{,}384$.

Bei der zweiten Figur ist die Strecke AE mit der Steigung 0,4 etwas steiler als die Strecke EC mit der Steigung 0,375. Daher liegt der Punkt E oberhalb der Strecke AC, und die zweite Figur ist entsprechend größer.





Aufgabe 6

(a) = (e), (f) = (i), (d) = (g), (c) = (h), (b) = (j)

Aufgabe 7

a)

Die Funktionsgleichung hat die Form y = mx + b. Wir bestimmen zuerst die Steigung m, indem wir mit Hilfe von A und B ein Steigungsdreieck bilden.

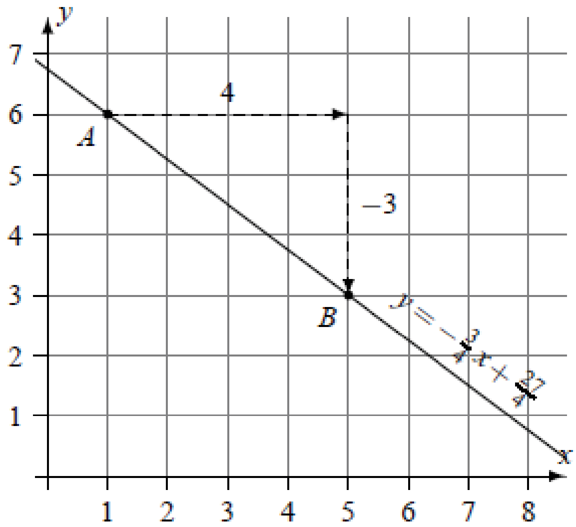
m = $\frac{3-6}{5-1}=-\frac{3}{4}$

Um den Achsenabschnitt b zu bestimmen, setzen wir den Punkt A (oder B) in die Funktionsgleichung ein.

$6=-\frac{3}{4}\cdot 1+b$, also b = $\frac{27}{4}$

Die Funktionsgleichung lautet:

$y=-\frac{3}{4}x+\frac{27}{4}$



b)

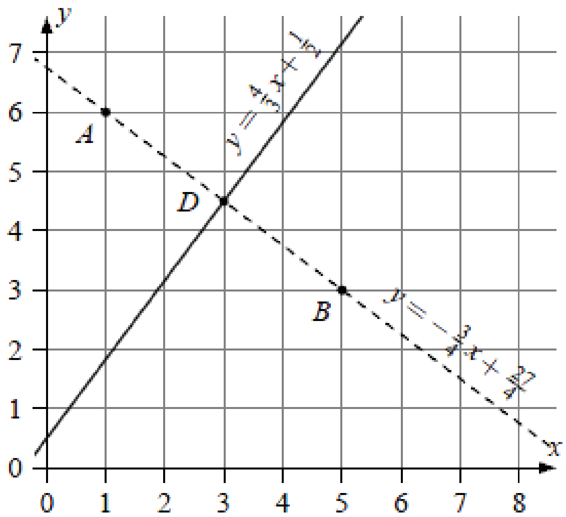
Die Gleichung der Geraden durch A und B ist $y=-\frac{3}{4}x+\frac{27}{4}$ (s. Aufgabe a).

Für die Mittelsenkrechte suchen wir wieder eine Gleichung der Form y = ax + b.

Die Steigung a ist der negative Kehrwert der Steigung der Geraden AB, also a= $\frac{4}{3}$.

Der Mittelpunkt der Strecke AB ist D(3/ $\frac{9}{2}$). Durch diesen Punkt verläuft die Mittelsenkrechte. Setzen wir diesen Punkt in die Funktionsgleichung ein, so ergibt sich $\frac{9}{2}=\frac{4}{3}\cdot 3+b$. Umstellen und Ausrechnen ergibt b = $\frac{1}{2}$.

Die Funktionsgleichung für die Mittelsenkrechte lautet: $y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{2}$



c)
Die Mittelsenkrechte von AB hat die Gleichung $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{2}$.

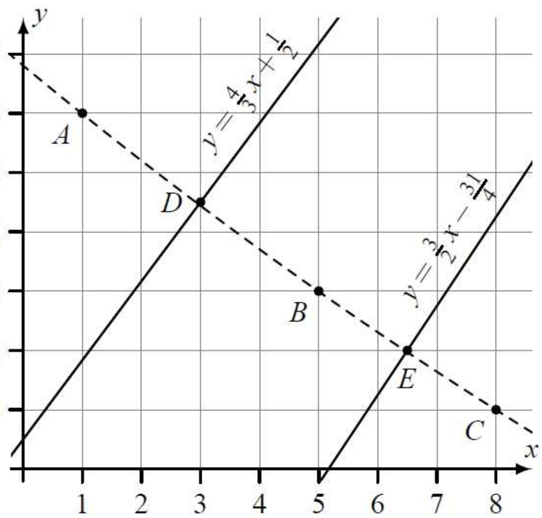
Die Mittelsenkrechte von BC hat die Gleichung y = a x + b.
Die Steigung ergibt sich aus der Steigung der Geraden BC, also $\frac{3-1}{5-8} = -\frac{2}{3}$.

Davon müssen wir wieder den negativen Kehrwert bilden, also a = $\frac{3}{2}$.

Der Mittelpunkt der Strecke BC ist E($\frac{13}{2}$|2).
Setzt man diesen Punkt in die Funktionsgleichung ein, ergibt sich 2 = $\frac{3}{2} \cdot \frac{13}{2}$ + b.

Umstellen und Ausrechnen ergibt b = $-\frac{31}{4}$.

Die Gleichungen für die beiden Mittelsenkrechten lauten $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{2}$ bzw. $y = \frac{3}{2}x - \frac{31}{4}$



Wie man in der Zeichnung sieht, sind die beiden Mittelsenkrechten fast parallel. Der gesuchte Umkreismittelpunkt liegt sehr weit entfernt oben rechts.
Wie finden ihn, indem wir den Schnittpunkt der beiden Geraden suchen. Dazu setzen wir die beiden Funktionsterme gleich und lösen nach *x* auf.

$$\frac{4}{3}x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}x - \frac{31}{4} \qquad \left| -\frac{4}{3}x \right.$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\right)x - \frac{31}{4} \qquad \left| +\frac{31}{4} \right.$$

$$\frac{1}{2} + \frac{31}{4} = \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\right)x$$

$$\frac{33}{4} = \frac{1}{6}x \qquad \left| \cdot 6 \right.$$

$$\frac{99}{2} = x$$

Anschließend setzen wir die gefundene *x*-Koordinate in eine der Funktionsgleichungen ein und bekommen die *y*-Koordinate $y = \frac{4}{3} \cdot \frac{99}{2} + \frac{1}{2} = \frac{133}{2}$.

Der Umkreismittelpunkt ist M ($\frac{99}{2}$ / $\frac{133}{2}$) oder M(49,5 / 66,5).

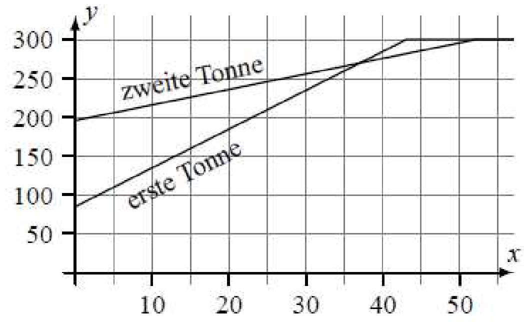
Die gestrichelte Linie im Bild oben ist ein kleiner Abschnitt des Umkreises. Da der Mittelpunkt sehr weit entfernt ist, sieht der Bogen fast gerade aus.

Aufgabe 8
Wir bezeichnen die Zeit, die seit dem Öffnen des Fallschirms vergangen ist, mit *t* und die Höhe über dem Boden mit *h*. Da der Fallschirmspringer gleichmäßig mit einer Geschwindigkeit von 5 $\frac{m}{s}$ fällt, ergibt sich die lineare Funktion $h = h_0 - 5\,\frac{m}{s} \cdot t$, wobei h_0 die noch unbekannte Höhe ist, in der der Fallschirm geöffnet wurde.
Wir finden h_0, indem wir *h* = 250 m und *t* = 20 s in die Funktionsgleichung einsetzen. Wir erhalten die Gleichung 250 m = $h_0 - 5\,\frac{m}{s} \cdot 20$ s oder vereinfacht 250 m = h_0 − 100 m. Also ist h_0 = 350 m.
Um die Fallzeit zu ermitteln, müssen wir die Zeit *t* finden, bei der die Höhe gleich Null ist. Wir müssen also die Nullstelle der „Fallfunktion“ finden.
Die Gleichung dazu lautet 0 = 350 m − 5 $\frac{m}{s} \cdot t$. Die Lösung ist *t* = 70 s. Der Fall dauert eine Minute und zehn Sekunden.

Aufgabe 9

Bezeichnet man die Füllmenge in Liter mit y und die Zeit in Minuten (seit dem Einsetzen des Regens) mit x, so gilt:

- für die erste Tonne: $y = 85 + 5 \cdot x$,
- für die zweite Tonne: $y = 196 + 2 \cdot x$.



Die erste Tonne ist voll, wenn $85 + 5 \cdot x = 300$ gilt. Die Lösung dieser Gleichung ist $x = 43$, also ist die erste Tonne um 13:47 Uhr voll.

Die zweite Tonne ist voll, wenn $196 + 2 \cdot x = 300$ gilt. Die Lösung dieser Gleichung ist $x = 52$, also ist die zweite Tonne um 13:56 Uhr voll.

Die Tonnen sind gleich voll, wenn
$196 + 2 \cdot x = 85 + 5 \cdot x$ gilt.
Die Lösung dieser Gleichung ist $x = 37$.
Um 13:41 Uhr sowie nach 13:56 Uhr sind beide Tonnen gleich voll.

Aufgabe 10

a) Das Koordinatensystem muss so gelegt werden, dass die Gerade durch den Punkt (0|2) verläuft. Die Steigung stimmt bereits.

b) Man erhält die richtige Steigung nur dann, wenn man die Einheiten auf den Achsen unterschiedlich wählt. Die Gerade muss durch die Punkte (0|−1) und (zum Beispiel) (1|3) verlaufen. Damit das passt, muss man die Einheit auf der x-Achse doppelt so groß wählen wie die Einheit auf der y-Achse.

c) Es ergibt sich das Problem, dass die Gerade nach oben“ geht, die Steigung aber negativ sein soll. Man muss deshalb das Blatt drehen. Zusätzlich muss man die Einheiten auf den Achsen anpassen. Die Gerade muss durch die Punkte (0|4) und (4|0) verlaufen.

a) b) c)